

Mantık Devreleri
1. Bölüm

Sayı Sistemleri

Feza Kerestecioğlu



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

1

Sayı Sistemleri

Ondalık Sayılar: $2762 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

Genelde, r tabanında yazılan bir sayı:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_r = a_n \times r^n + \dots + a_1 \times r + a_0 + a_{-1} \times r^{-1} + \dots + a_{-m} \times r^{-m}$$

$$a_i \in [0, \dots, r-1]$$

olarak açılabilir.

Örnekler:

$$(10110,11)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 16 + 4 + 2 + 0,5 + 0,25$$

$$= (22,75)_{10}$$

$$(4021,2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = 500 + 10 + 1 + 0,4 = (511,4)_{10}$$

Onaltılık tabanın rakamları: 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16 + 15 = (46687)_{10}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

2

Taban Dönüşümleri

Ondalık tabana çevirme doğrudan, üstlü ifadelerin ağırlıklı toplamı ile yapılabilir.

Örnekler: $(110111,1)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 + 0,5 = (55,5)_{10}$

$$(630,4)_8 = 6 \times 8^2 + 3 \times 8 + 4 \times 8^{-1} = 6 \times 64 + 24 + \frac{4}{8} = (408,5)_{10}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

3

Taban Dönüşümleri

Ondalık tabandan çevirme

Tamsayı:

$$\begin{aligned} (41)_{10} &= 20 \times 2 + 1 \times 2^0 \\ &= (10 \times 2) \times 2 + 1 \times 2^0 \\ &= 10 \times 2^2 + 1 \times 2^0 \\ &= 5 \times 2^3 + 1 \times 2^0 \\ &= (2 \times 2 + 1) \times 2^3 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 \\ &= (101001)_2 \end{aligned}$$

Bölüm	Kalan
41	
20	1
10	0
5	0
2	1
1	0
0	1

$(101001)_2 = (41)_{10}$

B	K
362	
72	2
14	2
2	4
0	2

$(2422)_5 = (362)_{10}$

Yaptığımız sürekli ikiye bölme işlemi

Benzer şekilde, ondalık tabandan r tabanına çevirmek için sürekli r 'ye bölmeyi uygulayabiliriz.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

4

Taban Dönüşümleri

Ondalık tabandan çevirme

Kesir:

$$\begin{aligned}
 (0,6875)_{10} &= (0,6875 \times 2) \times 2^{-1} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 0,375 \times 2^{-1} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 0,75 \times 2^{-2} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 1,5 \times 2^{-3} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} + 0,5 \times 2^{-3} \\
 &= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \\
 &= (0,1011)_2
 \end{aligned}$$

Tamsayı	Kesir
(0,1011) ₂	0 ,6875
	1 ,375
	0 ,75
	1 ,5
	1 ,0



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

5

Taban Dönüşümleri

İkili, sekizli ve onaltılı taban dönüşümleri:

Basit, çünkü $8 = 2^3$, $16 = 2^4$

$$\begin{aligned}
 (1100101010)_2 &= (1100101,010)_2 \times 2^3 \\
 &= (1100101)_2 \times 2^3 + (010)_2 \\
 &= (1100101)_2 \times 8^1 + (010)_2 \times 8^0 \\
 &= (1100)_2 \times 8^2 + (101)_2 \times 8^1 + (010)_2 \times 8^0 \\
 &= (1)_2 \times 8^3 + (100)_2 \times 8^2 + (101)_2 \times 8^1 + (010)_2 \times 8^0 \\
 &= 1 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 \\
 &= (1452)_8
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \end{array} & \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 3 & & 2 & & A & & 3
 \end{array}
 , \begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} = (1452,14)_8 = (32A,3)_{16} = 32A,3H$$

$$(34AC)_{16} = (0011\ 0100\ 1010\ 1100)_2 \quad (1274)_8 = (001\ 010\ 111\ 100)_2$$

Sekizli ve onaltılı sayılar, ikili sayıların kısaltılmış gösterimleri olarak görülebilir.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

6

Tümleme

Tabana (r 'ye) tümleme: Tamsayı kısmında n tane rakamı olan N sayısının tabana göre tümleyeni

$$\begin{aligned} N \neq 0 \text{ ise, } & r^n - N \\ N = 0 \text{ ise, } & 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnekler:

$$(52520)_{10} \text{'nin } 10 \text{'a tümleyeni} = 10^5 - 52520 = 47480$$

$$(25,639)_{10} \text{'un } 10 \text{'a tümleyeni} = 100 - 25,639 = 74,361$$

$$(101100)_2 \text{'in } 2 \text{'ye tümleyeni} = 1000000 - 101100 = (010100)_2$$

$$(0,0110)_2 \text{'in } 2 \text{'ye tümleyeni} = 1 - 0,0110 = 0,1010$$

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 0 \dots 0 \xrightarrow{\text{Tabana tümleme}} b_n b_{n-1} \dots b_1 0 \dots 0 \quad \begin{aligned} b_1 &= r - a_1 \\ b_i &= r - 1 - a_i \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$(3780)_{10} \text{'in } 10 \text{'a tümleyeni} = (6220)_{10}$$

$$(1011100)_2 \text{'in } 2 \text{'ye tümleyeni} = (0100100)_2$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

7

Tümleme

$(r - 1)$ 'e tümleme: Tamsayı kısmında n , kesir kısmında da m tane rakamı olan N sayısının tabana göre tümleyeni

$$r^n - r^{-m} - N$$

olarak hesaplanır.

Örnekler:

$$(52520)_{10} \text{'nin } 9 \text{'a tümleyeni} = 10^5 - 1 - 52520 = 99999 - 52520 = (47479)_{10}$$

$$(25,639)_{10} \text{'un } 9 \text{'a tümleyeni} = 100 - 10^{-3} - 25,639 = 99,999 - 25,639 = (74,360)_{10}$$

$$(101100)_2 \text{'in } 1 \text{'e tümleyeni} = 1000000 - 1 - 101100 = 111111 - 101100 = (010011)_2$$

$$(0,0110)_2 \text{'in } 1 \text{'e tümleyeni} = 1 - 0,0001 - 0,0110 = 0,1111 - 0,0110 = (0,1001)_2$$

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 \xrightarrow{(r-1)\text{'e tümleme}} b_n b_{n-1} \dots b_1 \quad b_i = r - 1 - a_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3780)_{10} \text{'in } 9 \text{'a tümleyeni} = (6219)_{10}$$

$$(1011100)_2 \text{'in } 1 \text{'e tümleyeni} = (0100011)_2$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

8

Tümleme

r 'ye tümleyenle çıkarma işlemi:

$$M - N \quad \begin{array}{ll} M \geq N: & M - N = M + (r^n - N) - r^n \\ M < N: & M - N = -(N - M) = -[r^n - (M + (r^n - N))] \end{array}$$

1. M ile N 'nin tümleyenini topla.
2. Elde çıkarsa: Eldeyi at. Geriye kalan $M - N$ 'dir.
Çıkamazsa: $M - N$, 1. adımdaki sonucun tümleyeninin eksisidir.

$$\begin{array}{r} (713)_{10} - (442)_{10} \\ \xrightarrow{10\text{'a tüm.}} \begin{array}{r} 713 \\ + 558 \\ \hline 1271 \end{array} \\ \downarrow \text{Eldeyi at} \\ \text{Sonuç} = 271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (442)_{10} - (713)_{10} \\ \xrightarrow{10\text{'a tüm.}} \begin{array}{r} 442 \\ + 287 \\ \hline 729 \end{array} \\ \downarrow 10\text{'a tümleme} \\ \text{Sonuç} = -271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (11011)_2 - (10110)_2 \\ \xrightarrow{2\text{'ye tüm.}} \begin{array}{r} 11011 \\ + 01010 \\ \hline 100101 \end{array} \\ \downarrow \text{Eldeyi at} \\ \text{Sonuç} = 00101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (10110)_2 - (11011)_2 \\ \xrightarrow{2\text{'ye tüm.}} \begin{array}{r} 10110 \\ + 00101 \\ \hline 11011 \end{array} \\ \downarrow 2\text{'ye tümleme} \\ \text{Sonuç} = -00101 \end{array}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

9

Tümleme

$(r - 1)$ 'e tümleyenle çıkarma işlemi:

$$M - N \quad \begin{array}{ll} M \geq N: & M - N = M + (r^n - r^{-m} - N) - r^n + r^{-m} \\ M < N: & M - N = -(N - M) = -[r^n - r^{-m} - (M + (r^n - r^{-m} - N))] \end{array}$$

1. M ile N 'nin tümleyenini topla.
2. Elde çıkarsa: Eldeyi at ve en sağdaki basamağa 1 ekle.
Çıkamazsa: $M - N$, 1. adımdaki sonucun tümleyeninin eksisidir.

$$\begin{array}{r} (713)_{10} - (442)_{10} \\ \xrightarrow{9\text{'a tüm.}} \begin{array}{r} 713 \\ + 557 \\ \hline 1270 \end{array} \\ \downarrow \text{Eldeyi sona ekle} \\ \text{Sonuç} = 271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (442)_{10} - (713)_{10} \\ \xrightarrow{9\text{'a tüm.}} \begin{array}{r} 442 \\ + 286 \\ \hline 728 \end{array} \\ \downarrow 9\text{'a tümleme} \\ \text{Sonuç} = -271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (11011)_2 - (10110)_2 \\ \xrightarrow{1\text{'e tüm.}} \begin{array}{r} 11011 \\ + 01001 \\ \hline 100100 \end{array} \\ \downarrow \text{Eldeyi sona ekle} \\ \text{Sonuç} = 00101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (10110)_2 - (11011)_2 \\ \xrightarrow{1\text{'e tüm.}} \begin{array}{r} 10110 \\ + 00100 \\ \hline 11010 \end{array} \\ \downarrow 1\text{'e tümleme} \\ \text{Sonuç} = -00101 \end{array}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

10

İşaretli İkili Sayılar

8 bitlik aritmetik:

Ondalık	İşaretsiz	İşaretli büyüklük	İşaretli 2'ye tümleme	İşaretli 1'e tümleme
+9	00001001	00001001	00001001	00001001
-9	—	10001001	11110111	11110110

4 bitlik aritmetik:

Ondalık	İşaretli büyüklük	İşaretli 2'ye tümleme	İşaretli 1'e tümleme
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
⋮	⋮	⋮	⋮
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	1000	—	1111
-1	1001	1111	1110
⋮	⋮	⋮	⋮
-6	1110	1010	1001
-7	1111	1001	1000
-8	—	1000	—



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

11

İkili Kodlar

Kod bir simgeler kümesidir. Bir grubun 2^n farklı elemanı n bitlik bir sayı ile temsil edilebilir.

	İkili kod	Bir diğer seçenek
Örnek: 0, 1, 2, 3 sayılarını temsil eden kod	0 00	0001
	1 01	0010
	2 10	0100
	3 11	1000



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

12

İkili Kodlar

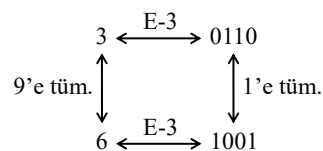
İkiye Kodlanmış Ondalık — İKO (BCD) ondalık rakamlara ikili tabandaki eşdeğerlerinin atanması ile elde edilir.

3 Fazlı Kod (E-3) ise İKO simgelerine 3 (0011) toplayarak elde edilir.

Ondalık	İKO	E-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

3 Fazlı Kod'un öz-tümleme özelliği:

Tümleyenin kodu, kodun tümleyenidir.



674 $\xrightarrow{\text{İKO}}$ 0110 0111 0100



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

13

İkili Kodlar

İki-beşli (biquinary) kod tüm tek (tek sayıda) hataları ve bazı çift (çift sayıda) hataları sezebilir.

Ondalık	İki-beşli
0	01 00001
1	01 00010
2	01 00100
3	01 01000
4	01 10000
5	10 00001
6	10 00010
7	10 00100
8	10 01000
9	10 10000



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

14

İkili Kodlar

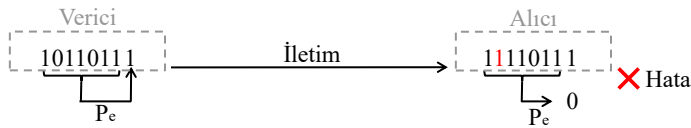
Eşlik biti ile hata sezimi

Eşlik biti *mesajdaki*, tüm 1'lerin veya tüm 0'ların çift veya tek sayıda olmasını sağlar.

Örnekler:

Mesaj	Çift eşlik biti	Tek eşlik biti
1000001	1000001 0	1000001 1
1010100	1010100 1	1010100 0

Oluşabilecek tek sayıdaki hatanın alıcıda sezimi için, *mesaj* eşlik biti ile birlikte iletilir.



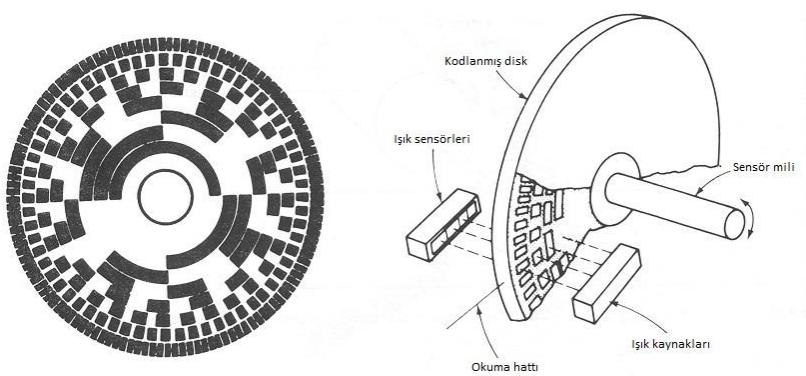
Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

15

İkili Kodlar

Gray kodu çoğunlukla şaft kodlamada kullanılır.

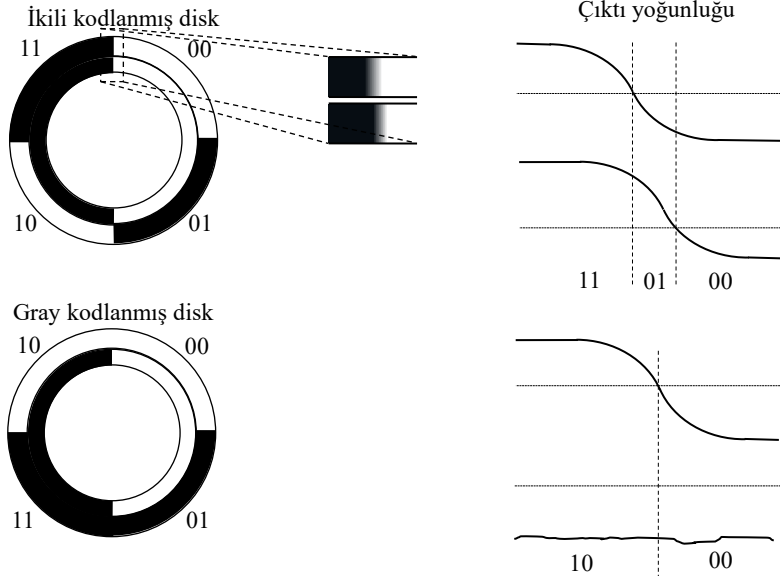


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

16

İkili Kodlar



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

17

İkili Kodlar

n bitlik bir Gray kodu üretmek için, 0'la genişletilmiş $(n - 1)$ bitlik bir kod ve 1 ile genişletilmiş yansımasını birleştirebiliriz.

```

0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 1
0 0 1 0
0 1 1 0
0 1 1 1
0 1 0 1
0 1 0 0
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 1
1 1 1 0
1 0 1 0
1 0 1 1
1 0 0 1
1 0 0 0

```



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

18

İkili Kodlar

Alfanumerik kodlar harfleri, rakamları, noktalama işaretlerini, vb. temsil etmek için kullanılan 7 veya 8 bitlik kodlardır.

ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	NUL	DLE	space	0	@	P	`	p
1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
4	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
C	FF	FS	,	<	L	\	l	
D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
F	SI	US	/	?	O	_	o	del

41H → 100 0001



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

19

İkili Mantık

İki değerden birini alabilen değişkenler ve fonksiyonlar

Temel işlemler: VE, VEYA, DEĞİL

VE

$$z = x \cdot y \quad (z = xy)$$

$$z = \begin{cases} 1 & x = 1 \text{ ve } y = 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VEYA

$$z = x + y$$

$$z = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ ve } y = 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

DEĞİL

$$z = x' \quad (z = \bar{x})$$

$$z = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ ise} \\ 0 & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

x	x'
0	1
1	0

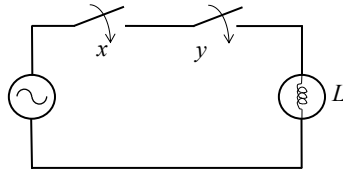


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

20

Anahtarlama Devreleri



$$L = x \cdot y$$

Bağımsız değişkenler: x, y

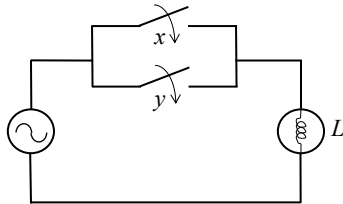
$0 \rightarrow$ anahtar açık

$1 \rightarrow$ anahtar kapalı

Bağımlı değişken: L

$0 \rightarrow$ kapalı

$1 \rightarrow$ açık



$$L = x + y$$

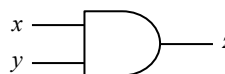


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

21

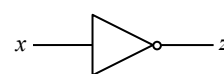
Mantık Kapıları



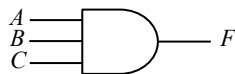
VE kapısı



VEYA kapısı

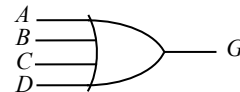


DEĞİL kapısı
(tersleyici)



Üç girdili VE kapısı

$$F = A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$$



Dört girdili VEYA kapısı

$$G = A + B + C + D = ((A + B) + C) + D$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

22

Öğrenme Çıktıları

Neler öğrendik:

- Tam ve kesirli sayıları ondalık tabandan diğer tabanlara veya diğer tabanlardan ondalığa çevirme
- İkili, sekizli ve onaltılı sayıları birbirine çevirme
- Herhangi bir r tabanı için, sayıların r 'ye ve $r - 1$ 'e tümleyenlerini bulma
- Çıkarma işlemini r ve $(r - 1)$ 'e tümleyenleri kullanarak gerçekleştirme;
- Eksi sayıların sayısal bilgisayarlarda gösterimi
- Bir kodun yoğunluğu ve gürbüzlüğü arasındaki değiş-tokuş
- Herhangi bir uzunluktaki Gray kodu alfabesini üretme
- VE, VEYA ve DEĞİL işlemlerinin sonuçlarını “doğruluk tabloları” ile gösterme



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

23

Devam edecek...

kerestec@khas.edu.tr



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

24