

Mantık Devreleri
3. Bölüm

Fonksiyonların Sadeleştirilmesi

Feza Kerestecioğlu



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

1

Karnaugh Tabloları

İki değişkenli fonksiyonlar:

m_0	m_1
m_2	m_3

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

		y	
		0	1
x	0		
	1		1

$x \cdot y$

		y	
		0	1
x	0		1
	1	1	1

$x + y = x'y + xy' + xy$
 $= m_1 + m_2 + m_3$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

2

Karnaugh Tabloları

Üç değişkenli fonksiyonlar:

		y			
		00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Herhangi iki bitişik hücrenin toplamı (VEYA) farklı olan değişken yok edilerek yazılabilir.

$$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y' + y) = xz$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

3

Karnaugh Tabloları

Örnekler:

$$F = x'yz + x'y'z' + xy'z' + xy'z \quad F = x'yz + xy'z' + xyz + xyz' \quad F = x'z + x'y + xy'z + yz$$

		y			
		00	01	11	10
x	0			1	1
	1	1	1		

$F = \underline{xy'} + \underline{x'y}$

		y			
		00	01	11	10
x	0			1	
	1	1		1	1

$F = \underline{yz} + \underline{xz'}$

		y			
		00	01	11	10
x	0		1	1	1
	1	1	1		

$F = \underline{z} + \underline{x'y}$

n değişkenli bir tabloda:

1 kare	→	n literalli bir asal terim
2 bitişik kare	→	$(n - 1)$ literalli bir terim
4 bitişik kare	→	$(n - 2)$ literalli bir terim
8 bitişik kare	→	$(n - 3)$ literalli bir terim
...	→	...
2^{n-1} bitişik kare	→	tek literalli bir terim
2^n bitişik kare	→	birim fonksiyonu



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

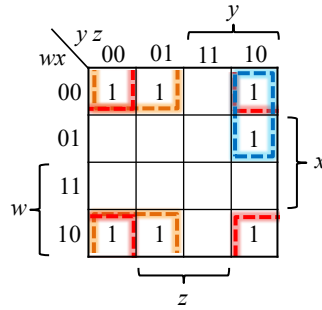
Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

4

Karnaugh Tabloları

Örnekler:

$$F(w, x, y, z) = w'x'y' + x'y'z' + w'xyz' + wx'y'$$



$$F = \underline{x'y'} + \underline{x'z'} + \underline{w'yz'}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

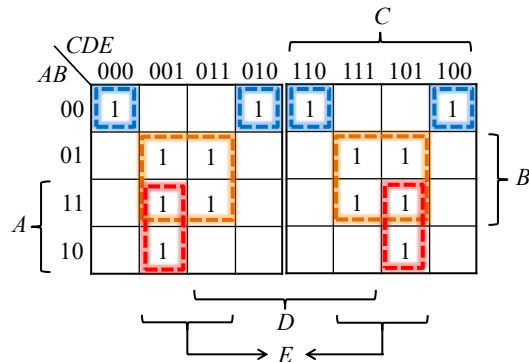
5

Karnaugh Tabloları

Örnekler:

0	00000
2	00010
4	00100
6	00110
9	01001
11	01011
13	01101
15	01111
17	10001
21	10101
25	11001
27	11011
29	11101
31	11111

$$F(A, B, C, D, E) = \sum(0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$$



$$F = \underline{BE} + \underline{AD'E} + \underline{A'B'E'}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

6

Toplamların Çarpımı Olarak Sadeleştirme

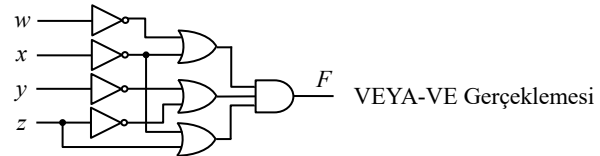
1. F' 'nü sadeleştir
2. F' 'nü tümle

$$F(w, x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

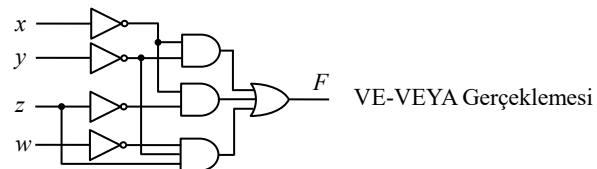
		y			
		00	01	11	10
wx	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

$$F' = wx + yz + xz'$$

$$F = (w' + x')(y' + z')(x' + z)$$



$$F = x'y' + x'z' + w'y'z$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

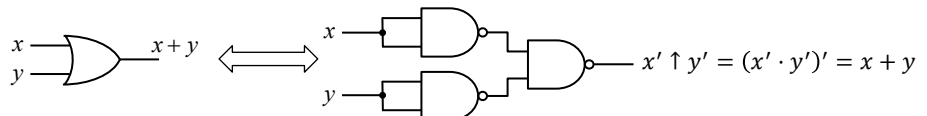
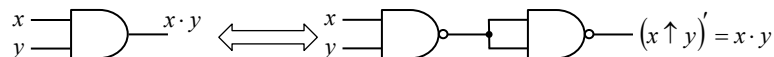
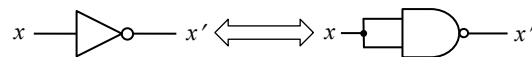
Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

7

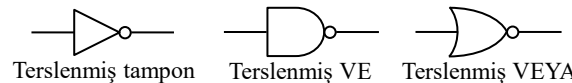
VE-DEĞİL ve VEYA-DEĞİL Gerçeklemeleri

Hem VE-DEĞİL hem de VEYA-DEĞİL, işlevsel olarak tamdır.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \uparrow 0 = 1 \\ 1 \uparrow 1 = 0 \end{array} \right\}$$

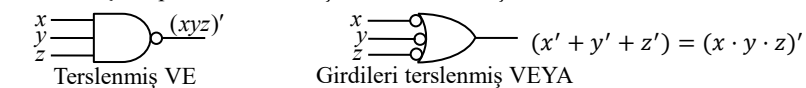


Tersleyici sembolleri:



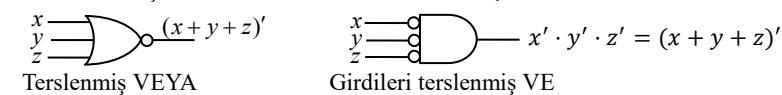
Terslenmiş tampon Terslenmiş VE Terslenmiş VEYA

VE-DEĞİL sembolleri:



Terslenmiş VE Girdileri terslenmiş VEYA

VEYA-DEĞİL sembolleri:



Terslenmiş VEYA Girdileri terslenmiş VE



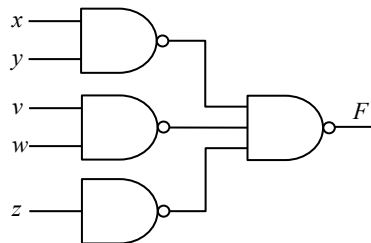
Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

8

VE-DEĞİL Gerçeklemeleri

$$F = xy + vw + z = [(x \cdot y)' \cdot (v \cdot w)' \cdot z']'$$



1. Fonksiyonu çarpımların toplamı olarak ifade et.
2. Çok literalli terimlerin literallerini VE-DEĞİL kapıları ile birleştir.
Tek literalli terimleri tümle (Terslenmiş VE).
3. Birinci düzeyin çıktılarını tek VE-DEĞİL kapısı ile birleştir.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

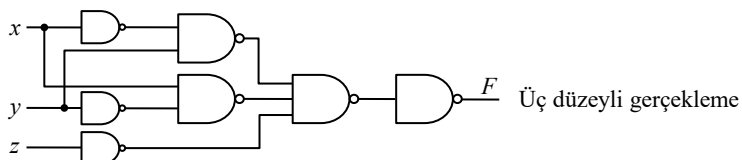
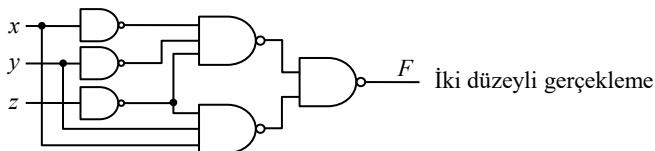
Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

9

VE-DEĞİL Gerçeklemeleri

1. Fonksiyonu çarpımların toplamı olarak ifade et.
2. Çok literalli terimlerin literallerini VE-DEĞİL kapıları ile birleştir.
Tek literalli terimleri tümle (Terslenmiş VE).
3. Birinci düzeyin çıktılarını tek VE-DEĞİL kapısı ile birleştir.

Örnek: $F = \sum(0, 6)$ $F = x'y'z' + xyz'$ $F' = z + x'y + xy'$



		y			
x	yz	00	01	11	10
	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1



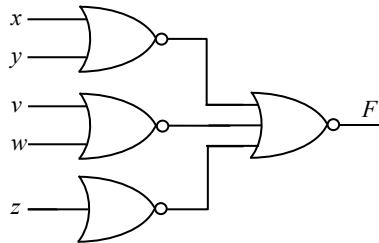
Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

10

VEYA-DEĞİL Gerçeklemeleri

$$F = (x + y)(v + w)z = [(x + y)' + (v + w)' + z']'$$



1. Fonksiyonu toplamaların çarpımı olarak ifade et.
2. Çok literalli terimlerin literallerini VEYA-DEĞİL kapıları ile birleştir.
Tek literalli terimleri tümle (Terslenmiş VEYA).
3. Birinci düzeyin çıktılarını tek VEYA-DEĞİL kapısı ile birleştir.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

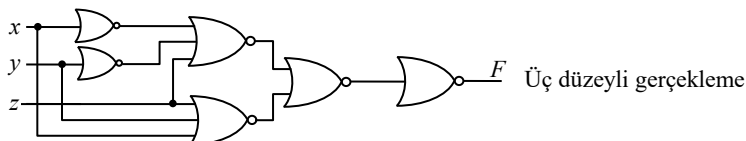
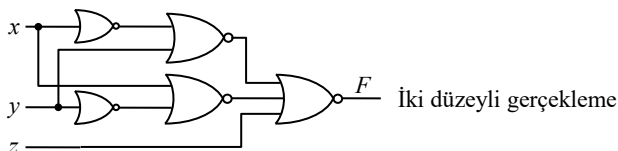
11

VEYA-DEĞİL Gerçeklemeleri

1. Fonksiyonu toplamaların çarpımı olarak ifade et.
2. Çok literalli terimlerin literallerini VEYA-DEĞİL kapıları ile birleştir.
Tek literalli terimleri tümle (Terslenmiş VEYA).
3. Birinci düzeyin çıktılarını tek VEYA-DEĞİL kapısı ile birleştir.

Örnek: $F = \sum(0, 6)$ $F' = z + x'y + xy'$ $F = x'y'z' + xyz'$
 $F = z'(x + y')(x' + y)$ $F' = (x + y + z)(x' + y' + z)$

		y z			
		00	01	11	10
x	0	1	0	0	0
	1	0	0	0	1



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

12

Geçerli Gerçeklemeler

Dejenere Biçimler

VE-VE
VEYA-VEYA
VE-VE-DEĞİL
VEYA-VEYA-DEĞİL
VE-DEĞİL-VEYA-DEĞİL
VEYA-DEĞİL-VE-DEĞİL
VE-DEĞİL-VEYA
VEYA-DEĞİL-VE

Geçerli Biçimler

✓ VE-VEYA
✓ VEYA-VE
✓ VE-DEĞİL-VE-DEĞİL
✓ VEYA-DEĞİL-VEYA-DEĞİL
VE-DEĞİL-VE
VE-VEYA-DEĞİL
VEYA-DEĞİL-VEYA
VEYA-VE-DEĞİL



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

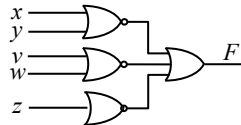
13

Geçerli Gerçeklemeler

Geçerli Biçimler

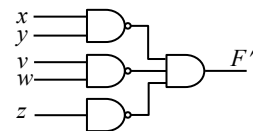
✓ VE-VEYA
✓ VEYA-VE
✓ VE-DEĞİL-VE-DEĞİL
✓ VEYA-DEĞİL-VEYA-DEĞİL
✓ VE-DEĞİL-VE
✓ VE-VEYA-DEĞİL
✓ VEYA-DEĞİL-VEYA
✓ VEYA-VE-DEĞİL

$$F = (x + y)(v + w)z$$

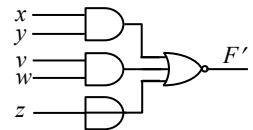


$$(x + y)' + (v + w)' + z' = ((x + y)(v + w)z)'$$

$$F = xy + vw + z$$



$$(xy)'(vw)'z' = (xy + vw + z)'$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

14

Önemsiz Durumlar

$$F(w, x, y, z) = \sum(1, 3, 7, 11, 15)$$

$$\text{Önemsiz durumlar: } d(w, x, y, z) = \sum(0, 2, 5)$$

		y z			
		00	01	11	10
w x	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

$$F = \underline{yz} + \underline{w'z}$$

$$F' = z' + wy'$$

$$F = z(w' + y) = w'z + yz$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

15

Önemsiz Durumlar

$$F(w, x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 6, 14)$$

$$\text{Önemsiz durumlar: } d(w, x, y, z) = \sum(9, 10, 11, 15)$$

		y z			
		00	01	11	10
w x	00	1	1	0	1
	01	0	0	0	1
	11	0	0	X	1
	10	0	X	X	X

$$F = \underline{yz'} + \underline{w'x'y'}$$

$$F' = wx' + yz + xy'$$

$$F = (w' + x)(y' + z')(x' + y)$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

16

Asal Örtücüler

Asal örtücü terim: Mümkün olan en fazla sayıda bitişik hücreyi bir grupta birleştirerek elde edilen terim

Bir asal terim yalnızca bir asal örtücü terim tarafından kapsanıyorsa, bu asal örtücü terim, **temel asal örtücü** bir terimdir.

		C			
		CD			
AB		00	01	11	10
A	00	1		1	1
	01		1	1	
	11		1	1	
	10	1	1	1	1

Asal örtücüler: $BD, AD, B'C, CD, AB', B'D'$

Temel asal örtücüler: $BD, B'D'$

$$F(A, B, C, D) = BD + B'D' + \begin{cases} CD + AD \\ CD + AB' \\ B'C + AD \\ B'C + AB' \end{cases}$$

Önce, temel asal örtücüleri belirleyin. Ardından, kalan asal terimleri kapsayan en küçük örtücü terim kümesini bulun.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

17

Öğrenme Çıktıları

Neler öğrendik:

- Boole fonksiyonlarını çarpımların toplamı ve toplamaların çarpımı şeklinde sadeleştirme
- Boole fonksiyonlarını
 - VE – VEYA
 - VEYA – VE
 - VE-DEĞİL – VE-DEĞİL
 - VEYA-DEĞİL – VEYA-DEĞİL
 formlarında iki veya üç seviyeli devreler olarak gerçekleştirme
- Boole fonksiyonlarının sadeleştirilmesinde "önemsiz" durumların kullanılması
- Boole fonksiyonlarının asal örtücüleri ve temel asal örtücüleri



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

18

Devam edecek...

kerestec@khas.edu.tr



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu