

Mantık Devreleri 4. Bölüm

Kombinezonsal Mantık

Feza Kerestecioğlu



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

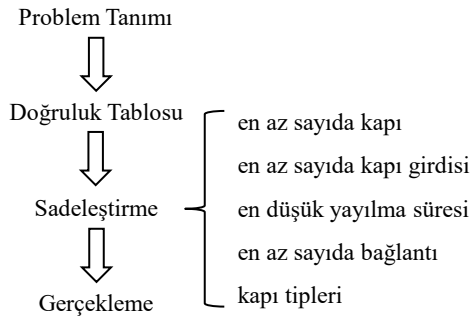
Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

1

Kombinezonsal Mantık

Kombinezonsal Mantık: Çıktılar, girdilerin mevcut değerlerine bağlıdır. Başka bir deyişle, girdilerin mantıksal kombinasyonlarıdır.

Ardışık Mantık: Çıktılar sadece mevcut değerlere değil, geçmiş değerlere de bağlıdır.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

2

Toplayıcılar

Yarım toplayıcı iki biti toplar.

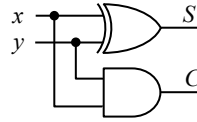
Tam toplayıcı üç biti toplar.

Yarım toplayıcı

Girdiler		Çıktılar	
x	y	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = x'y + xy' = x \oplus y$$

$$C = x \cdot y$$



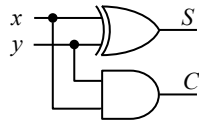
Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

3

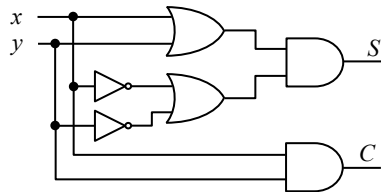
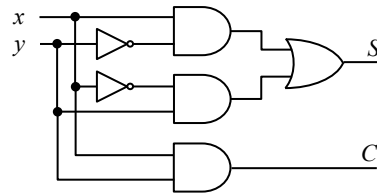
Toplayıcılar

Yarım toplayıcı

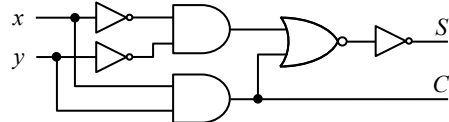


$$S = x'y + xy'$$

$$C = x \cdot y$$



$$S = x'y + xy' = \Sigma(1,2) = \Pi(0,3) = (x + y)(x' + y')$$



$$S' = \Sigma(0,3) = x'y' + xy = x'y' + C$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

4

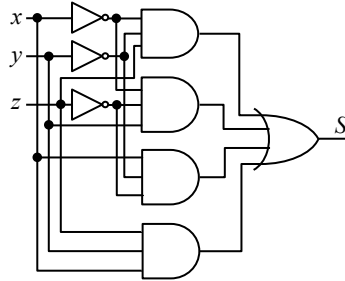
Toplayıcılar

Tam toplayıcı

Girdiler			Çıktılar	
x	y	z	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

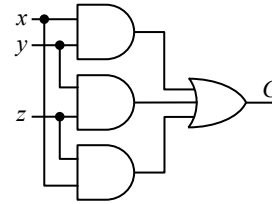
$x \backslash yz$	y			
	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$S = x'y'z + x'y'z' + xy'z' + xyz$$



$x \backslash yz$	y			
	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$$C = xy + yz + xz$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

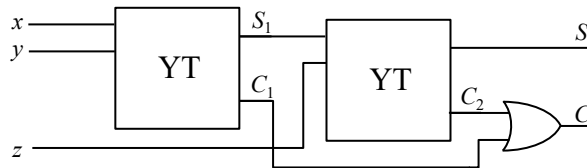
Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

5

Toplayıcılar

Tam toplayıcı yarı toplayıcılar kullanılarak da gerçekleştirilebilir.

1. x ve y 'yi yarı toplayıcıyla topla
2. 1. adımın çıkışıyla z 'yi topla
3. 1. ve 2. adımın elde çıktılarını VEYAla.



$$\begin{aligned}
 S &= (x \oplus y) \oplus z = (x'y + xy') \oplus z \\
 &= (x'y + xy')z' + (x'y + xy')z \\
 &= (x'y + xy')z' + (x + y')(x' + y)z \\
 &= x'y'z' + xy'z' + (xy + x'y')z \\
 &= x'y'z' + xy'z' + xyz + x'y'z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= xy + (x \oplus y)z = xy + (x'y + xy')z \\
 &= xy + x'y'z + xy'z \\
 &= xy + xyz + xy'z + x'y'z + xy'z \\
 &= xy + (x + x')yz + (y + y')xz \\
 &= xy + yz + xz
 \end{aligned}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

6

Çıkarıcılar

Yarım çıkarıcı bir biti diğerinden çıkarır.

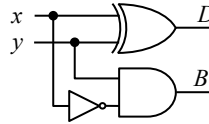
Tam çıkarıcı iki bitin toplamını üçüncü bir bitten çıkarır.

Yarım çıkarıcı

Girdiler		Çıktılar	
x	y	B	D
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$D = x'y + xy' = x \oplus y$$

$$B = x' \cdot y$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

7

Çıkarıcılar

Tam çıkarıcı

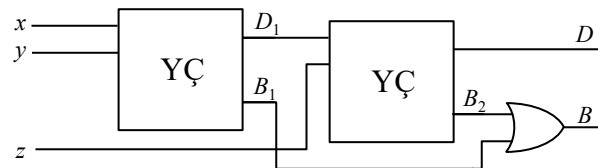
$x - y - z$			Çıktılar	
Girdiler			B	D
x	y	z	B	D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

		y			
		00	01	11	10
x	0		1		1
	1	1		1	
		z			

$$D = xy'z' + x'y'z' + x'y'z + xyz$$

		y				
		z	00	01	11	10
x	0			1	1	1
	1				1	

$$B = x'y + yz + x'z$$



Bunu doğrulayın!



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

8

Kod Dönüştürme

Örnek: İKO'dan 3 Fazlalı koda dönüştürme

İKO				3 Fazlalı			
A	B	C	D	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	X	X	X	X
...	...	...	...	...	...	...	...

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$w = A + BD + BC$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

$$x = B'D + B'C + BC'D'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

$$y = C'D' + CD$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

$$z = D'$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

9

Kod Dönüştürme

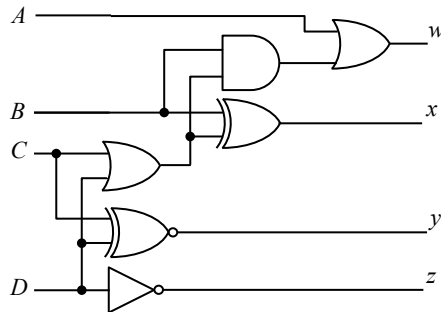
Örnek: İKO'dan 3 Fazlalı koda dönüştürme

$$w = A + BD + BC = A + B(C + D)$$

$$x = B'D + B'C + BC'D' = B'(C + D) + B(C + D)' = B \oplus (C + D)$$

$$y = C'D' + CD = C \odot D$$

$$z = D'$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

10

Kod Dönüştürme

Örnek: Gray kodunu ikiliye dönüştürme

Gray			İkili		
A	B	C	x	y	z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1

$$x = A$$

A	BC			
	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

$$y = AB' + A'B$$

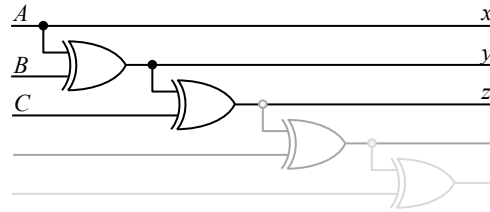
$$= A \oplus B$$

A	BC			
	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$z = AB'C' + A'B'C + ABC + A'BC'$$

$$= (A \oplus B)C' + (A \oplus B)C$$

$$= (A \oplus B) \oplus C$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

11

Özel-VEYA, Eşitlik, Hata Yönetimi

Özel-VEYA fonksiyonu:

$$x \oplus y = x'y + xy' = \sum(1, 2)$$

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus y' = x' \oplus y = (x \oplus y)'$$

$$x \oplus 1 = x'$$

$$x \oplus x' = 1$$

Özel-VEYA fonksiyonu **tek fonksiyondur**.

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \oplus x_n = \bigoplus_{i=1}^n x_i = \sum(\text{ikili gösterimde tek sayıda 1 içeren asal terim numaraları})$$

x ₁	x ₂	
	0	1
0		1
1	1	

x ₁	x ₂ x ₃			
	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

x ₁ x ₂	x ₃ x ₄			
	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

12

Özel-VEYA, Eşitlik, Hata Yönetimi

Eşitlik fonksiyonu:

$$x \odot y = x'y' + xy = \Sigma(0,3)$$

$$\begin{aligned} x \odot 0 &= x' & x \odot x &= 1 \\ x \odot 1 &= x & x \odot x' &= 0 \end{aligned} \quad x \odot y' = x' \odot y = (x \odot y)'$$

$$x_1 \odot x_2 \odot \cdots \odot x_{n-1} \odot x_n = \bigodot_{i=1}^n x_i = \Sigma(\text{ikili gösterimde çift sayıda 0 içeren asal çarpım numaraları})$$

$x_1 \backslash x_2$	0	1
0	1	
1		1

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1		1	
01		1		1
11	1		1	
10		1		1

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i = \begin{cases} \bigodot_{i=1}^n x_i & n \text{ tek ise} \\ (\bigodot_{i=1}^n x_i)' & n \text{ çift ise} \end{cases}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

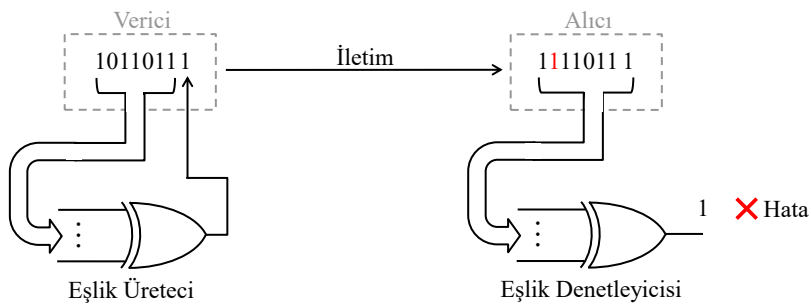
13

Eşlik Kontrolü

Bit sayısı n olan bir ileti için (çift) eşlik biti bütün ileti bitlerini Özel-VEYAlayarak elde edilir.

$$P = \bigoplus_{i=1}^n x_i \Rightarrow \left[\bigoplus_{i=1}^n x_i \right] \oplus P = 0$$

Tek sayıda oluşabilecek hataların alıcıda sezimi için ileti eşlik biti ile birlikte iletilir.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

14

Hata Düzeltme

Hamming Kodu n -bitlik bir iletide oluşabilecek bir hatanın yerini saptamak için ek m sayıda bit kullanır.

$$2^m > n + m \text{ veya } m > \log_2(n + m)$$

Örnek:

$$n = 20 \Rightarrow 2^5 > 20 + 5 \Rightarrow m = 5$$

$$n = 1000 \Rightarrow 2^{10} = 1024 > 1000 + 10 \Rightarrow m = 10$$

Örnek: Sekiz bitlik veri için Hamming kodu

$$n = 8 \Rightarrow 2^4 > 8 + 4 \Rightarrow m = 4$$

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1		
D_8	D_7	D_6	D_5	P_8	D_4	D_3	D_2	P_4	D_1	P_2	P_1		
												3	8 4 2 1
												5	0 0 1 1
												6	0 1 0 1
												7	0 1 1 0
												9	1 0 0 1
												10	1 0 1 0
												11	1 0 1 1
												12	1 1 0 0

P_i = Konum numarasının i 'ler basamağında 1 bulunan veri bitlerinin eşliği

$$P_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}$$

$$P_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}$$

$$P_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12}$$

$$P_8 = x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

15

Hata Düzeltme

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

$$P_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$P_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$P_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$P_8 = x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

$$C_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$C_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$C_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$C_8 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

İletilen kod

Alınan kod

$$\begin{array}{cccc} P_8 & P_4 & P_2 & P_1 \\ \oplus C_8 & C_4 & C_2 & C_1 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

✓ Hata yok



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

16

Hata Düzeltme

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

$$P_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$P_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$P_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$P_8 = x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

İletilen kod

Alınan kod

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0

$$C_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$C_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$C_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$C_8 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$\begin{array}{r} P_8 \quad P_4 \quad P_2 \quad P_1 = 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \oplus C_8 \quad C_4 \quad C_2 \quad C_1 = 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

✗ x_5 hatalı



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

17

Hata Düzeltme

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0

$$P_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}$$

$$P_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}$$

$$P_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{12}$$

$$P_8 = x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus x_{12}$$

İletilen kod

Alınan kod

x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0

$$C_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$C_2 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$C_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$C_8 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$\begin{array}{r} P_8 \quad P_4 \quad P_2 \quad P_1 = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \oplus C_8 \quad C_4 \quad C_2 \quad C_1 = 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

✗ x_2 hatalı

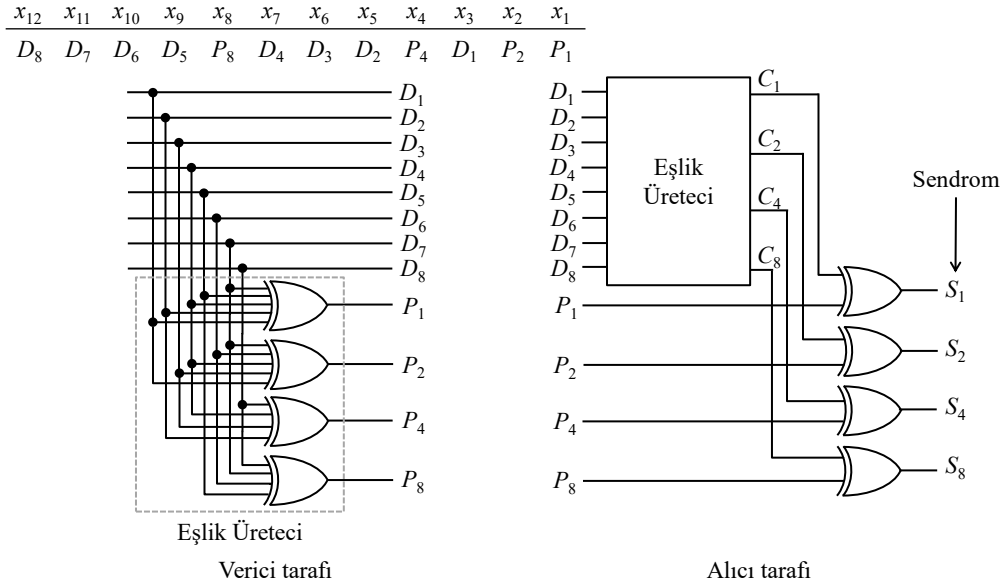


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

18

Hata Düzeltme



19

Öğrenme Çıktıları

Neler öğrendik:

- Toplayıcı ve çıkarıcı devrelerin farklı şekillerde gerçekleştirilmesi
- Kod dönüştürücülerin (ya da belirlenmiş bir amaca yönelik devrelerin) kapı düzeyinde sadeleştirme teknikleri kullanılarak tasarımı
- Hamming-kodlu iletilerin kontrol bitlerinin elde edilmesi
- Hamming kodlu bir iletideki olası bir hatanın yerinin saptanması ve düzeltilmesi

20

Devam edecek...

kerestec@khas.edu.tr



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu