

Mantık Devreleri 2. Bölüm

Boole Cebri

Feza Kerestecioğlu



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

1

Cebir

Bir cebirin temel unsurları: Küme, işlem(ler), aksiyom

Küme, ortak bir özelliğe sahip elemanların oluşturduğu bir topluluktur.

Örnekler:

Gerçel sayılar kümesi: $\mathbb{R}$

$$3, 1 \in \mathbb{R}$$

3'e bölünebilen tamsayılar kümesi: $\mathbb{Z}_3$

$$7 \notin \mathbb{Z}_3$$

İkili işlem kümedeki bir eleman çiftine, (mutlaka kümede olması gerekmeyen) benzersiz başka bir eleman atayan bir kuraldır.

$$z = x * y \quad x \in S, y \in S$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

2

Temel Tanımlar

1. Kapalılık: S için $(*)$ işlemi altında kapalılığın gerek ve yeter koşulu:

$$(a * b) \in S \quad \forall a, b \in S$$

2. Birleşme: $(*)$ işleminin S kümesindeki birleşme özelliği için gerek ve yeter koşul:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in S$$

3. Sıra bağımsızlık: $(*)$ işleminin S kümesindeki sıra bağımsızlık özelliği için gerek ve yeter koşul:

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in S$$

4. Etkisiz Elemanın Olması: S kümesinin bir etkisiz elemanının $e \in S$ olması için gerek ve yeter koşul:

$$e * a = a * e = a \quad \forall a \in S$$

5. Ters Elemanın Olması: Etkisiz elemanı e olan S kümesinin $(*)$ işlemine göre bir tersinin olması için gerek ve yeter koşul: Her $a \in S$ elemanı için

$$a * b = e$$

eşitliğini sağlayan bir b elemanı olması

6. Dağılma: $(*)$ işleminin bir başka $(\times)$ işlemi üzerinde dağılma özelliğinin olması için gerek ve yeter koşul

$$a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c) \quad \forall a, b, c \in S$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Temel Tanımlar

Örnekler:

Yarıgrup: Kapalılık ve birleşme özelliğini sağlayan $(S, *)$

$(\mathbb{N}, +)$ bir (sıra bağımsız) yarıgrubu

Halka: Aşağıdaki özelliklerle sağlayan $(S, +, \times)$

- $(+)$ kapalılık ve birleşme özelliğini sağlar; etkisiz elemanı ve tersi vardır;
- $(\times)$ kapalılık ve birleşme özelliğini sağlar;
- $(\times)$ işleminin $(+)$ üzerinde dağılma özelliği vardır.

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ (sıra bağımsız) halkası

$(\mathbb{P}, +, \times)$ (sıra bağımsız) halkası

Cisim: $(S, +, \times)$

- Hem $(+)$ hem de $(\times)$, kapalılık, birleşme ve sıra bağımsızlık özelliklerini sağlarlar, etkisiz elemanları ve tersleri vardır.
- $(\times)$ işleminin $(+)$ üzerinde dağılma özelliği vardır.

$(\mathbb{R}, +, \times)$ cismi $\rightarrow$ Gerçek sayılar cebri



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Boole Cebrinin Aksiyomatik Tanımı

1. B kümesi $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre kapalıdır.

2. $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine göre etkisiz elemanları vardır:

$$\begin{aligned} x + 0 &= 0 + x = x \\ x \cdot 1 &= 1 \cdot x = x \end{aligned} \quad \forall x \in B$$

3. Hem $(+)$ hem de $(\cdot)$ işlemi sırabagimsızdır:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned} \quad \forall x, y \in B$$

4. Hem $(+)$ hem de $(\cdot)$ işleminin diğeri üzerine dağılma özelliği vardır:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ x + (y \cdot z) &= (x + y) \cdot (x + z) \end{aligned} \quad \forall x, y, z \in B$$

5. Her $x \in B$ elemanı için, $x + x' = 1$ ve $x \cdot x' = 0$ eşitliklerini sağlayan bir ve sadece bir $x' \in B$ elemanı vardır.

6. B kümesinde en az iki farklı eleman vardır:

$$x, y \in B \quad \exists x \neq y$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Boole Cebrinin Aksiyomatik Tanımı

Önemli noktalar:

1. Her aksiyomda $(+) \leftrightarrow (\cdot)$ ve $0 \leftrightarrow 1$ dualitesi vardır.

2. Birleşme özelliği hem $(+)$ hem de $(\cdot)$ için geçerlidir; ama bir aksiyom değildir.

3. $(+)$ işlemi $(\cdot)$ üzerine dağılma özelliğine sahiptir.

4. Ne $(+)$, ne de $(\cdot)$ işleminin tersi vardır.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Boole Cebrinin Aksiyomatik Tanımı

$$B = \{0, 1\}$$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Aksiyomları kontrol edelim:

Kapalılık: Tablolarda görülüyor.

Etkisiz elemanlar:

$0 + 0 = 0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ 0 , (+) için etkisiz elemandır.

$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ 1 , (·) için etkisiz elemandır.

Sıra bağımsızlık: Tablolarda görülüyor.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

7

Boole Cebrinin Aksiyomatik Tanımı

$$B = \{0, 1\}$$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Aksiyomları kontrol edelim:

Dağılma:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

x	y	z	y + z	x · (y + z)	x · y	x · z	x · y + x · z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

8

Boole Cebrinin Aksiyomatik Tanımı

$$B = \{0, 1\}$$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Aksiyomları kontrol edelim:

Tümleyenlerin varlığı:

x	x'	
0	1	$0 + 1 = 1$ and $0 \cdot 1 = 0$
1	0	$1 + 0 = 1$ and $1 \cdot 0 = 0$

B'deki eleman sayısı:

$$0 \neq 1$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

9

Başlıca Teoremler

Teorem: $x + x = x$

Tanıt: $x + x = (x + x) \cdot 1$ (Etkisiz eleman)
 $= (x + x) \cdot (x + x')$ (Tümleyen)
 $= x + x \cdot x'$ (Dağılıma)
 $= x + 0$ (Tümleyen)
 $= x$ (Etkisiz eleman)

Teorem: $x \cdot x = x$

Tanıt: $x \cdot x = x \cdot x + 0$
 $= x \cdot x + x \cdot x'$
 $= x \cdot (x + x')$
 $= x \cdot 1$
 $= x$

Teorem: $x + 1 = 1$

Tanıt: $x + 1 = 1 \cdot (x + 1)$ (Etkisiz eleman)
 $= (x + x') \cdot (x + 1)$ (Tümleyen)
 $= x + x' \cdot 1$ (Dağılıma)
 $= x + x'$ (Etkisiz eleman)
 $= 1$ (Tümleyen)

Teorem: $x \cdot 0 = 0$

Tanıt: $x + 1 = 1$ tanıtının duali



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

10

Başlıca Teoremler

Teorem: $(x')' = x$

Tanıt:

(x') 'nin tümleyeni: (x')

(x') 'nin tümleyeni: x Çünkü, $x + x' = 1$ ve $x \cdot x' = 0$

Tümleyenin tekliğinden dolayı, $(x')' = x$

Teorem (Soğurma): $x + x \cdot y = x$

Tanıt: $x + xy = x \cdot 1 + xy$

$$= x \cdot (1 + y)$$

$$= x \cdot (y + 1)$$

$$= x \cdot 1$$

$$= x$$

Teorem: $x \cdot (x + y) = x$

Tanıt: Dualite yoluyla

De Morgan teoremleri:

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

11

Boole Fonksiyonları

$F: B^n \rightarrow B$

$$F_1 = xyz'$$

$$F_2 = x + y'z$$

$$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$$

$$F_4 = xy' + x'z$$

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

$$F_3 = F_4$$

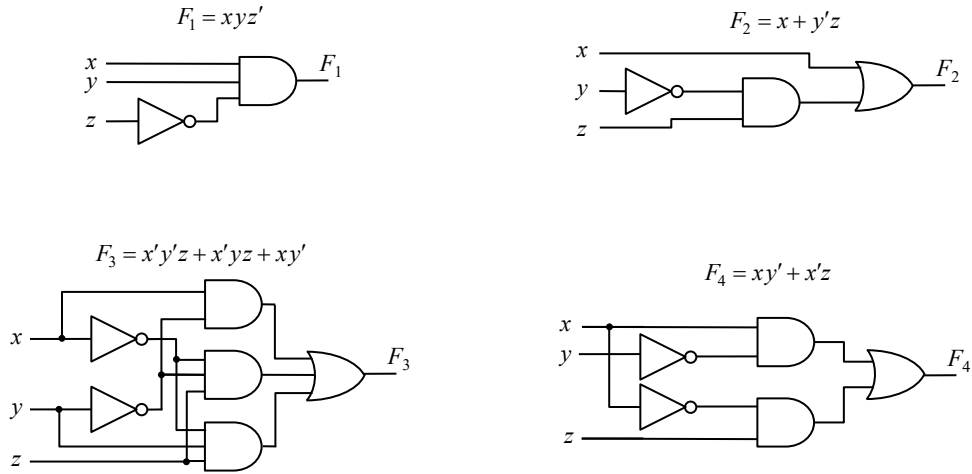


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

12

Boole Fonksiyonları



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

13

Boole Fonksiyonları

Literale: Üslü veya üssüz bir değişken

Genelde, Boole fonksiyonlarını olabildiğince az literal ile ifade etmek isteriz.

Örnekler:

$$x + x'y = (x + x') \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$$

$$x \cdot (x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$$

$$x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$

$$xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x') = xy + x'z + xyz + x'yz = xy(1 + z) + x'z(1 + y) = xy + x'z$$

$$(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

14

Boole Fonksiyonları

Fonksiyonların tümleyenleri De Morgan teoremlerini uygulayarak elde edilebilir.

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_n)' = A_1' \cdot A_2' \cdot \dots \cdot A_n'$$

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)' = A_1' + A_2' + \dots + A_n'$$

Örnekler:

$$F_1 = x'yz' + x'y'z$$

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')' \cdot (x'y'z)' = (x + y' + z) \cdot (x + y + z')$$

Diğer bir yol da dual fonksiyonun her literalini tümlemektir.

$$F_1 \text{ duali} = (x' + y + z')(x' + y' + z)$$

$$F_1' = (x + y' + z)(x + y + z')$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Temel Biçimler

n tane farklı değişkenin literallerinin VE-lenmesi ile bir **asal terim** (ya da **asal çarpım**) elde edilir.

Benzer şekilde, n farklı değişkenin literallerinin VEYA-lanması ile de bir **asal toplam** elde edilir.

n tane değişken için, 2^n asal terim ve asal toplam tanımlanabilir.

x	y	z	Asal terimler	Asal toplamlar	
0	0	0	$x'y'z'$ m_0	$x + y + z$ M_0	$m'_i = M_i$
0	0	1	$x'y'z$ m_1	$x + y + z'$ M_1	
0	1	0	$x'yz'$ m_2	$x + y' + z$ M_2	
0	1	1	$x'yz$ m_3	$x + y' + z'$ M_3	
1	0	0	$xy'z'$ m_4	$x' + y + z$ M_4	
1	0	1	$xy'z$ m_5	$x' + y + z'$ M_5	
1	1	0	xyz' m_6	$x' + y' + z$ M_6	
1	1	1	xyz m_7	$x' + y' + z'$ M_7	



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

Temel Biçimler

Bir fonksiyon, değerinin 1 olduğu bağımsız değişkenlerin literallerine karşılık gelen asal terimlerin toplamı (VEYA) olarak ifade edilebilir.

Benzer şekilde, fonksiyonun değerinin 0 olduğu bağımsız değişkenlerin literallerine karşılık gelen asal toplamların çarpımı (VE) olarak da ifade edilebilir.

x	y	z	F_1	F_2		
0	0	0	1	0	$F_1 = \underline{x'y'z'} + \underline{xy'z'} + \underline{xy'z}$	$F_1 = \Sigma(0,4,5) = \Pi(1,2,3,6,7)$
					$= m_0 + m_4 + m_5 = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$	
0	0	1	0	1	$F_1' = x'y'z + x'y'z' + x'yz + xy'z' + xyz$	
0	1	0	0	1		
0	1	1	0	0	$\Rightarrow F_1 = (x + y + z')(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y' + z)(x' + y' + z')$	
1	0	0	1	0	$F_2 = x'y'z + x'y'z' + xy'z + xyz$	$F_2 = \Sigma(1,2,5,7) = \Pi(0,3,4,6)$
1	0	1	1	1	$= m_1 + m_2 + m_5 + m_7 = M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6$	
1	1	0	0	0	$= (x + y + z)(x + y' + z')(x' + y + z)(x' + y' + z)$	
1	1	1	0	1		

Görüldüğü ki, n tane değişkenin 2^n farklı fonksiyonu yazılabilir.



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

17

Temel Biçimler

Örnekler:

$F = x + y'z$ fonksiyonunu asal terimlerin toplamı olarak ifade edelim.

$$x = x(y + y') = xy + xy' = xy(z + z') + xy'(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

$$y'z = (x + x')y'z = xy'z + x'y'z$$

$$\Rightarrow F = xyz + xyz' + \cancel{xy'z} + \cancel{xy'z'} + \cancel{xy'z} + \cancel{xy'z'} + x'y'z = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z$$

$$= \Sigma(1,4,5,6,7)$$

$F = xy + x'z$ fonksiyonunu asal toplamların çarpımı olarak ifade edelim.

$$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z) = \cancel{(x + x')}(y + x')(x + z)(y + z)$$

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$$

$$y + z = xx' + y + z = (x + y + z)(x' + y + z)$$

$$\Rightarrow F = (x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z)(x + y' + z) = M_4 \cdot M_5 \cdot M_0 \cdot M_2 = \Pi(0,2,4,5)$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

18

Temel Biçimler

$$\Rightarrow F = (x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z)(x + y' + z) = M_4 \cdot M_5 \cdot M_0 \cdot M_2 = \prod(0, 2, 4, 5)$$

$$F' = \prod(1, 3, 6, 7) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$F = (M_1 \cdot M_3 \cdot M_6 \cdot M_7)' = M_1' + M_3' + M_6' + M_7' = m_1 + m_3 + m_6 + m_7 = \sum(1, 3, 6, 7)$$

Temel biçimleri doğrudan birbirine dönüştürebiliriz:

$$G = \prod(1, 4, 6) = \sum(0, 2, 3, 5, 7) \quad H = \sum(0, 2, 6, 7) = \prod(1, 3, 4, 5) \quad n=3$$

Standart Biçimler:

$$\text{Çarpımların toplamı: } F_1(x, y, z) = y + xy + x'yz$$

$$\text{Toplamların çarpımı: } F_2(w, x, y, z) = y(x + z)(x + z + w)$$

Herhangi bir ifadeyi standart biçime getirmek için dağılma kurallarını kullanabilirsiniz.

$$F_1 = (AB + CD)(A'B' + C'D') = \cancel{A'A}BB' + A'B'CD + ABC'D' + \cancel{C'C}DD' = A'B'CD + ABC'D'$$



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

19

İkili İşlemler

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		.	/			/		$\oplus$	+								

$$F_0(x, y) = 0$$

Sıfır işleci

$$F_4(x, y) = x'y = y/x$$

Engelleme (y , ama x değil)

$$F_1(x, y) = x \cdot y$$

VE



$$F_5(x, y) = y$$

Aktarım

$$F_2(x, y) = x \cdot y' = x/y$$

Engelleme (x , ama y değil)

$$F_6(x, y) = x'y + xy' = x \oplus y$$

Özel-VEYA



$$F_3(x, y) = x$$

Aktarım işleci



$$F_7(x, y) = x + y$$

VEYA



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

20

İkili İşlemler

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
			.	/		/		$\oplus$	+	$\downarrow$	$\odot$	'	$\supset$	'	$\supset$	$\uparrow$	

$$F_8(x, y) = x' \cdot y' = (x + y)'$$

$$= x \downarrow y$$

VEYA-DEĞİL 

$$F_{12}(x, y) = x'$$

Tümleme

$$F_9(x, y) = xy + x'y'$$

$$= x \odot y$$

Eşitlik, Özel VEYA-DEĞİL 

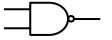
$$F_{13}(x, y) = x' + y = x \supset y$$

Gerektirme (x ise y)

$$F_{10}(x, y) = y'$$

Tümleme 

$$F_{14}(x, y) = (x \cdot y)' = x \uparrow y$$

VE-DEĞİL 

$$F_{11}(x, y) = (x'y)' = x + y'$$

$$= y \supset x$$

Gerektirme (y ise x)

$$F_{15}(x, y) = 1$$

Birim işlemi

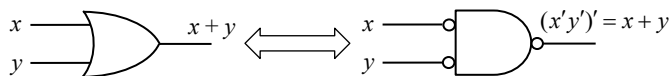
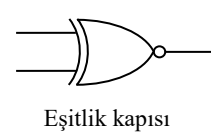
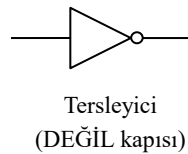
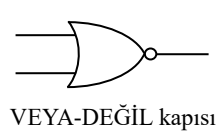
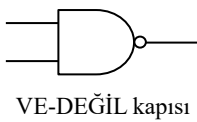
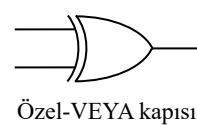
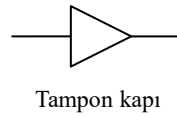
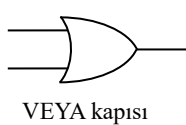
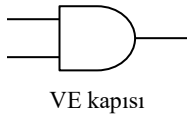


Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

21

İkili İşlemler



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

22

Çok Girişli Kapılar

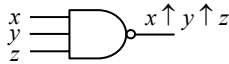
VE-DEĞİL ve VEYA-DEĞİL kapılarının birleşme özelliği yoktur.

$$(x \uparrow y) \uparrow z = ((xy)'z)' = xy + z' = \sum(0, 2, 4, 6, 7)$$

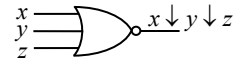
$$x \uparrow (y \uparrow z) = (x(yz)')' = x' + yz = \sum(0, 1, 2, 3, 7)$$

$$\Rightarrow (x \uparrow y) \uparrow z \neq x \uparrow (y \uparrow z)$$

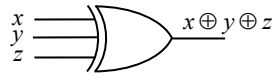
Tanım gereği: $x \uparrow y \uparrow z \equiv (xyz)'$



$$x \downarrow y \downarrow z \equiv (x + y + z)'$$



Özel-VEYA ve Eşitlik kapıları birleşme özelliğine sahiptir.



x	y	z	$x \oplus y \oplus z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

23

Öğrenme Çıktıları

Neler öğrendik:

- Cebirlerin temel unsurları
- Boole Cebirinin aksiyomları
- Boole fonksiyonlarını temsil eden cebirsel ifadeler, doğruluk tabloları ve devre şemalarını birbirine çevirme
- Boole fonksiyonlarını cebirsel işlemlerle sadeleştirme
- Boole fonksiyonlarının duallerini ve tümleyenlerini bulma
- Boole fonksiyonlarını çarpımların toplamı ve toplamaların çarpımı olarak ifade etme
- Boole fonksiyonlarını asal terimlerin toplamı ve asal toplamaların çarpımı olarak ifade etme
- Temel ikili işlemlerin sembolleri ve doğruluk tabloları



Nöroteknolojik Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi Ar-Ge Okulu

24

Devam edecek...

kerestec@khas.edu.tr



Nöroteknolojik
Çözümler Platformu

Boğaziçi Üniversitesi
Ar-Ge Okulu